Die radialsymmetrische Lösung für skalare, masselose Mesonen in der projektiven Relativitätstheorie

Von Joachim Petzold

Aus dem Institut für theoretische Physik der Freien Universität Berlin

(Z. Naturforschg. **14 a**, 205—207 [1959]; eingegangen am 26. November 1958)

Es wird die vollständige, radialsymmetrische, statische Lösung der Feldgleichungen für skalare, masselose Mesonen in der projektiven Relativitätstheorie angegeben und diskutiert. Es existiert keine singularitätenfreie Lösung.

§ 1. Allgemeine Feldgleichungen

Die Feldgleichungen der projektiven Relativitätstheorie[1] können aus einem vierdimensionalen Variationsprinzip hergeleitet werden. Es sollen daher alle Größen in einem vierdimensionalen Vektorraum betrachtet werden. Es sei g_{ik} der (symmetrische) metrische Tensor, $g = \det |g_{ik}|$, g^{ik} der zu g_{ik} inverse Tensor, mit dem die Indizes gehoben werden. Ferner sei R_{ik} der Einstein-Tensor (verjüngte Riemann-Tensor), $\sigma = \ln 2\varkappa$ mit $\varkappa$ als Gravitationszahl und φ das skalare Mesonenfeld. Die gewöhnliche Ableitung schreiben wir $\sigma_{|n} = \partial\sigma/\partial x^n$ und die kovariante $\alpha^k{}_{||n} = \alpha^k{}_{|n} + \Gamma_{sn}{}^k \alpha^s$, wobei $\Gamma_{sn}{}^k$ die Christoffel-schen Symbole sind. Wir betrachten Feldgleichungen, die sich aus folgendem Variationsprinzip herleiten:

$$\delta \int (R^i{}_i + \sigma^{|n}{}_{||n} + \tfrac{1}{2}\sigma_{|n}\,\sigma^{|n} + \tfrac{1}{2}\varkappa\,\varphi_{|n}\,\varphi^{|n}) \cdot \sqrt{-g}\,\mathrm{d}x^0 \ldots \mathrm{d}x^3 = 0\,. \quad (1.1)$$

Man erhält als Feldgleichungen durch Variation der g_{ik}, $\varkappa$ und φ:

$$R_{ik} + \tfrac{1}{2}\,\sigma_i\,\sigma_k + \tfrac{1}{2}\,\varkappa\,\varphi_{|i}\,\varphi_{|k} = 0\,, \quad (1.2)$$

$$\sigma^{|n}{}_{||n} = b = \tfrac{1}{2}\,\varkappa\,\varphi_{|n}\,\varphi^{|n}\,, \quad (1.3)$$

$$(\sqrt{-g}\,\varkappa\,\varphi^{|n})_{|n} = 0\,. \quad (1.4)$$

Aus (1.2) leitet man in bekannter Weise den Energie-Impulssatz her, der hier

$$(\varkappa\,T_i{}^k + S_i{}^k)_{||k} = 0 \quad (1.5)$$

lautet, wobei $T_i{}^k$ der Energie-Impulstensor des Mesonenfeldes mit

$$T_{ik} = \tfrac{1}{2}\varphi_{|i}\,\varphi_{|k} - \tfrac{1}{4}\varphi_{|n}\,\varphi^{|n}\,g_{ik} \quad (1.6)$$

und $S_i{}^k$ ein analoger Tensor auf Grund der $\varkappa$-Variabilität mit

$$S_{ik} = \tfrac{1}{2}\sigma_{|i}\,\sigma_{|k} - \tfrac{1}{4}\sigma_{|n}\,\sigma^{|n}\,g_{ik} \quad (1.7)$$

ist. Die $\varkappa$-Variabilität gibt Anlaß zu Spannungen und das Feld der Gravitationszahl $\varkappa$ besitzt Energie und Impuls. Mit einer noch näher zu bestimmenden Konstanten $\tilde{\varkappa}$ von der Dimension der Gravitationszahl deuten wir als Energie bzw. Impuls im Volumen V

$$E = -\frac{1}{\tilde{\varkappa}} \int\limits_V (\varkappa\,T_0{}^0 + S_0{}^0)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3,$$

$$I_\mu = \frac{\;}{\tilde{\varkappa}} \int\limits_V (\varkappa\,T_\mu{}^0 + S_\mu{}^0)\;\sqrt{-g}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 \quad (1.8)$$

$$(\mu = 1, 2, 3)\,.$$

§ 2. Die radialsymmetrische Lösung

Wir suchen die radialsymmetrische Lösung unserer Feldgleichungen, setzen $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \psi$, $x^0 = c\,t$ und machen für das Linienelement den Ansatz $\mathrm{d}s^2 = g_{11}(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\psi^2) + g_{00}(r)\,c^2\,\mathrm{d}t^2$. Als Randbedingung fordern wir für $r \to \infty$:

$$g_{00} = -1\,, \quad g_{11} = 1\,, \quad \varkappa = \varkappa_\infty > 0\,, \quad \varphi = 0\,.$$

Führt man in den Feldgleichungen g_{00} als neue Variable ein und setzt $\varrho = r/\alpha$ ($\alpha > 0$ beliebig), so erhält man die Lösungen

$$1/\varrho = |g_{00}|^{1/2}(|g_{00}|^{-1/2\beta} - |g_{00}|^{1/2\beta})\,, \quad (2.1)$$

$$g_{11} = 4[(1-\beta)\,|g_{00}|^{-1/2\beta} + (1+\beta)\,|g_{00}|^{1/2\beta}]^{-2}, \quad (2.2)$$

$$\gamma\,\varkappa = \tfrac{1}{4}\lambda^{1/2}\,|g_{00}|^{\sqrt{1-\beta^2}/2\beta} + \lambda^{-1/2}\,|g_{00}|^{-\sqrt{1-\beta^2}/2\beta}]^2, \quad (2.3)$$

$$\nu\,\varphi = -4\sqrt{1-\beta^2}\,[(\lambda\,|g_{00}|^{\sqrt{1-\beta^2}/\beta} + 1)^{-1} - (\lambda+1)^{-1}]\,, \quad (2.4)$$

wobei β, γ, λ, ν Konstanten sind. Für β besteht die Einschränkung $-1 \leq \beta \leq +1$. Zwischen γ und λ gilt die Beziehung: $4\,\gamma\,\varkappa_\infty - 1 = \lambda + (1/\lambda)$.

Bilden wir den limes $\beta \to 0$, $\lambda = 1$, so wird $\varphi = \alpha\,\varkappa_\infty^{-1/2}[r^2 + (\alpha/2)^2]^{-1/2}$. Das stimmt mit der radialsymmetrischen Lösung für das elektromagne-

[1] Eine zusammenfassende Darstellung der projektiven Relativitätstheorie findet man in G. Ludwig, Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1951.

tische Potential der nichtlinearen Elektrodynamik von Mie überein[2].

§ 3. Betrachtung des Verlaufes der Lösungen

$|g_{00}|$ ist für $\beta<0$ $(\beta>0)$ eine monoton abnehmende (wachsende) Funktion von ϱ. Daher ist $|g_{00}|$ $(1/|g_{00}|)$ beschränkt. Für kleine ϱ besitzt $|g_{00}|$ ein Verhalten wie $\varrho^{2\beta/(1-\beta)}$, für große ϱ wie $1-\beta/\varrho$. Die Kurven $|g_{00}(\varrho)|$ für verschiedene β schneiden sich nicht.

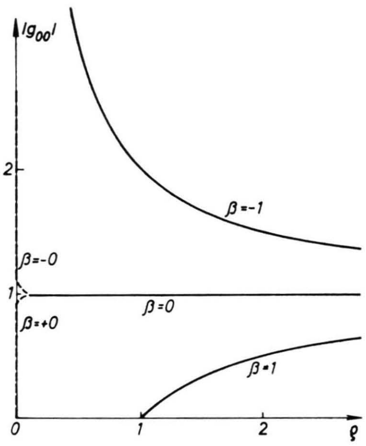

Abb. 1.

g_{11} zeigt für kleine ϱ ein Verhalten wie

$$g_{11}\to 4/(1-\beta)^2\cdot\varrho^{2\beta/(1-\beta)}\to 0$$

und für große ϱ $g_{11}\to 1+\beta/\varrho$.

Für $\beta<0$ ist g_{11} monoton wachsend, der ganze Raum negativ gekrümmt. Für $\beta>0$ besitzt g_{11} ein Maximum

$$g_{11\,\max}=\frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\text{an der Stelle } \varrho_{\max}=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}^{\,\beta}.$$

Die Stelle, an der $g_{11}=1$ wird, ist $\varrho^*=\beta(\varrho_{\max})^2$. Für $\varrho<\varrho^*$ ist der Raum negativ, sonst positiv gekrümmt.

Die Gravitationszahl zeigt für kleine ϱ ein Verhalten wie

$$\gamma\varkappa\to\frac{1}{4\lambda}\,\varrho^{-2\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}}\to\infty\,,$$

für große ϱ wie

$$\gamma\varkappa\to\tfrac14\,[\lambda^{1/2}+\lambda^{-1/2}-\tfrac12\sqrt{1-\beta^2}\,(\lambda^{1/2}-\lambda^{-1/2})\,(1/\varrho)]^2\,.$$

Für $\lambda<1$ ist $\gamma\varkappa$ monoton abnehmend, für $\lambda>1$ besitzt es ein Minimum $\gamma\varkappa_{\min}=1$ an der Stelle

$$\varrho_{\min}=\lambda^{\beta/2\sqrt{1-\beta^2}}\,[\lambda^{1/2\sqrt{1-\beta^2}}-\lambda^{-1/2\sqrt{1-\beta^2}}]\,.$$

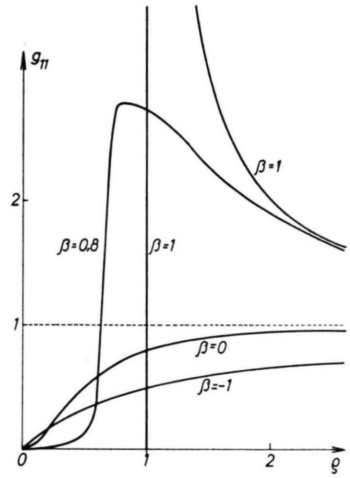

Abb. 2.

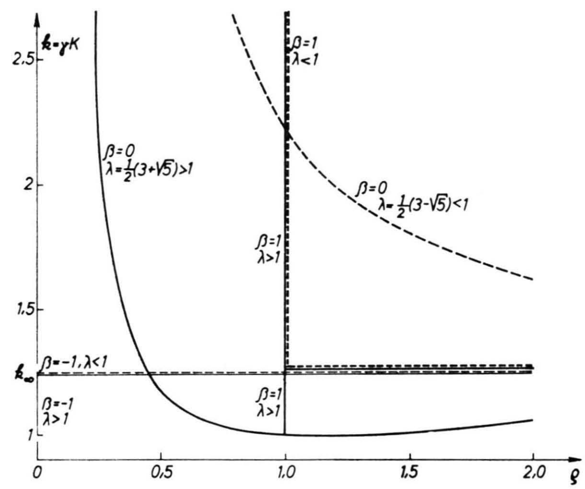

Abb. 3.

Damit erhält die Integrationskonstante γ eine anschauliche Bedeutung.

Das Mesonenfeld ist eine monotone Funktion. Für kleine ϱ bleibt es endlich:

$$\nu\varphi\to-4\sqrt{1-\beta^2}\left[\frac{\lambda}{\lambda+1}-\lambda\,\varrho^{2\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}}\right]$$

für große ϱ verhält es sich wie

$$-4\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\lambda}{\lambda+1}\,\frac{1}{\varrho}\,.$$

§ 4. Diskussion

Wir wollen mit unserer Lösung die Gesamtenergie (1.8) berechnen. Die Energiedichte des Mesonen-

[2] G. Mie, Ann. Phys., Lpz. **39**, 1 [1912].

feldes ist

$$-\frac{\varkappa}{\tilde\varkappa}T_0{}^0\sqrt{-g}=\frac{1-\beta^2}{4\tilde\varkappa\,\gamma\varkappa}\sqrt{\frac{g_{11}}{|g_{00}|}}\,\frac{1}{\varrho^2}\sin\vartheta\,.$$

Im Nullpunkt zeigt sie bis auf einen von ϱ unabhängigen Faktor das gleiche Verhalten wie $d\varphi/dr$, ist also im Nullpunkt integrierbar. Als Gesamtenergie des Mesonenfeldes erhalten wir

$$-\int\frac{\varkappa}{\tilde\varkappa}T_0{}^0\sqrt{-g}\,dr\,d\vartheta\,d\psi$$
$$=\frac{\pi}{\varkappa}(1-\beta^2)\,\alpha\int\frac{1}{\gamma\varkappa}\sqrt{\frac{g_{11}}{|g_{00}|}}\,\frac{1}{\varrho^2}\,\frac{d\varrho}{d|g_{00}|}\,d|g_{00}|$$
$$=\frac{4\pi}{\tilde\varkappa}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\alpha\lambda}{\lambda+1}\,.$$

Die Energiedichte des Feldes der Gravitationszahl ist:

$$-\frac{1}{\tilde\varkappa}S_0{}^0\sqrt{-g}=\frac{1}{4\tilde\varkappa}(1-\beta^2)\left(1-\frac{1}{\gamma\varkappa}\right)\cdot\sqrt{\frac{g_{11}}{|g_{00}|}}\,\frac{1}{\varrho^2}\sin\vartheta\,.$$

Für kleine ϱ verhält sich diese Energie wie

$$\tfrac{1}{2}(1+\beta)\,(1/\varrho)\,\sin\vartheta\,,$$

ist also im Nullpunkt nicht integrierbar. Die Gesamtenergie des $\varkappa$-Feldes ist

$$-\frac{1}{\tilde\varkappa}\int S_0{}^0\sqrt{-g}\,dr\,d\vartheta\,d\psi$$
$$=\int\frac{\varkappa}{\tilde\varkappa}T_0{}^0\sqrt{-g}\,dr\,d\vartheta\,d\psi-\lim_{\varrho\to0}\frac{1-\beta^2}{\beta}\,\alpha\log|g_{00}(\varrho)|\,.$$

Wir erhalten also für die nichtkonvergente Gesamtenergie

$$E=\lim_{\varrho\to0}\;-\frac{2\pi}{\tilde\varkappa}\,\alpha(1+\beta)\,\log(r/\alpha)\,.$$

Das hat umgekehrt zur Folge, daß es keine singularitätenfreie Lösung der Metrik gibt.

Für einen nicht zu singulären Energie-Impulstensor wird die Metrik in erster Näherung durch die Integrale [3]

$$\int\frac{1}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\{\varkappa(\mathfrak{r}')\,T_i{}^k(\mathfrak{r}')+S_i{}^k(\mathfrak{r}')\}\sqrt{-g(\mathfrak{r}')}\,d\mathfrak{r}'$$

bestimmt. Dem würde entsprechen, daß die Integrationskonstante β der Metrik so zu wählen ist, daß der metrische Tensor überall singularitätenfrei bleibt. In unserem Fall existiert aber obiges Integral nicht, und wir haben keinen Anhaltspunkt für die Wahl von β. Wir können diese Konstante erst festlegen, wenn wir unsere Lösungen von den Singularitäten befreit haben, indem wir z. B. eine äußere Quelle für das Mesonenfeld einführen. Außerhalb dieser werden die Felder durch unsere Lösung dargestellt. Das erzeugte Gravitationspotential wird asymptotisch durch das Verhalten von g_{00} für große Werte von r dargestellt [4]. Da das Gravitationspotential negativ ist, folgt aus $g_{00}\to-1+\beta/\varrho$, daß nur $\beta>0$ eine physikalische Bedeutung hat.

Unsere Felder sind keine Lösung der Feldgleichungen im Nullpunkt. Integrieren wir (1.4) über ein kleines Volumen V um den Nullpunkt, so erkennen wir, daß wir die Mesonengleichung für eine δ-funktionsartige Quelle der Stärke $4\pi\nu\alpha\,\delta(\mathfrak{r})\,(-g)^{-1/2}$ gelöst haben. Die divergierende Energie hat ein Analogon in der unendlichen Selbstenergie eines punktförmigen Elektrons in der Elektrodynamik. Auch die Quelle b für die $\varkappa$-Variabilität ist im Nullpunkt singulär. Es ist nämlich

$$b\sqrt{-g}=\tfrac{1}{2}\alpha^2\nu^2\sqrt{\frac{g_{11}}{|g_{00}|}}\,\frac{1}{\varkappa r^2}\sin\vartheta\,.$$

Für kleine r wird dieses proportional $r^{2\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}-1}$. Da $\sqrt{-g}$ proportional $r^{2+(1+\beta)/(1-\beta)}$ ist, folgt, daß b stärker als r^{-2} singulär wird. Die Gesamtintensität der Quelle ist jedoch endlich

$$\int b\sqrt{-g}\,dr\,d\vartheta\,d\psi=2\pi\alpha\sqrt{1-\beta^2}\,\lambda/(\lambda+1)\,.$$

§ 5. Einsteins Theorie

Die Feldgleichungen in der vierdimensionalen EINSTEINschen Theorie erhält man, indem man $\varkappa=\varkappa_\infty=\text{const}$ setzt und die Feldgleichung (1.3) für die Gravitationszahl fortläßt. Die Metrik ist die gleiche wie in der projektiven Theorie. Für das Mesonenfeld erhält man dagegen $\varphi=(\nu/\beta)\log|g_{00}|$. Es besitzt im Nullpunkt eine logarithmische Singularität. Im Gegensatz zur entsprechenden Gleichung im euklidischen Raum $\Delta\varphi=0$ ist durch den Einfluß der Metrik die Singularität gemildert, die in der projektiven Theorie durch die $\varkappa$-Variabilität sogar aufgehoben wird. Jedoch ist dort die Gravitationszahl singulär.

Aus der Gleichheit der Metrik in der projektiven und in der EINSTEINschen Theorie folgt aus (1.2) die Gleichheit der (Gesamt-)Energie-Impulstensoren. Insbesondere divergiert hier die Gesamtenergie in der gleichen Weise wie in der projektiven Theorie.

Herrn Prof. Dr. G. LUDWIG möchte ich an dieser Stelle meinen Dank für seine Förderung und sein ständiges Interesse an dieser Arbeit ausdrücken.

[3] Vgl. z. B. C. MØLLER, The Theory of Relativity, At the Clarendon Press, Oxford 1952, § 119.

[4] C. MØLLER, l. c. [3], S. 245. — A. SOMMERFELD, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1949, S. 323.